ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

ĐỖ TRỌNG NGUYÊN

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA CỦA CÁC SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 11/2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

ĐỖ TRỌNG NGUYÊN

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA CỦA CÁC SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành:	**Phương pháp toán sơ cấp**
Mã số:	**8 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên, 11/2019

Mục lục

Mở đầu

Mục đích của luận văn là trình bày lại một số bài toán liên quan đến lũy thừa của các số nguyên. Đây là một trong những vấn đề thú vị của lý thuyết số, được nhiều người quan tâm nghiên cứu và đã có rất nhiều kết quả phong phú.

Bài toán đầu tiên chúng tôi quan tâm đến là bài toán biểu diễn các số nguyên thành tổng riêng lũy thừa của các nhân tử nguyên tố. Ký hiệu S_k là tập tất cả các số nguyên n có thể biểu diễn thành tổng lũy thừa k của tất cả các nhân tử nguyên tố phân biệt của n. Hiện nay, với $k \geq 2$, chúng ta chưa có nhiều thông tin về tập hợp S_k, thậm chí, người ta mới chỉ tìm ra một số phần tử của S_3. De Koninck và Luca [3] đã đặt vấn đề nghiên cứu về các số nguyên có thể biểu diễn thành tổng riêng lũy thừa của các nhân tử nguyên tố. Các tác giả này đã khai thác được một số thông tin về các số nguyên này. Chúng tôi tập trung tìm hiểu và trình bày các kết quả này trong Chương 1 của luận văn.

Bài toán thứ hai mà chúng tôi quan tâm là bài toán tìm các số Fibonacci và các số Lucas có dạng cx^2. Các số Fibonacci F_n và các số Lucas L_n là những số nổi tiếng, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Đây cũng là hai dãy số nguyên có nhiều tính chất đẹp đã được tìm ra. Riêng bài toán nghiên cứu về các số Fibonacci và các số Lucas có dạng cx^2 cũng đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu. Trong Chương 2 của luận văn, chúng tôi tập trung tìm hiểu và trình bày lại kết quả của Cohn [2] về lời giải cho bài toán này khi $c = 1, 2$ và kết quả của Keskin và Yosma [5] về lời giải cho các phương trình $L_n = 2L_m x^2, F_n = 2F_m x^2, L_n = 6L_m x^2, F_n = 3F_m x^2$ và $F_n = 6F_m x^2$.

Vấn đề cuối cùng mà chúng tôi quan tâm trong luận văn này là sưu tầm và trình bày lại lời giải cho một số bài toán thi Olympic về lũy thừa của các số nguyên. Đây là một trong những dạng toán hay gặp trong các đề thi học sinh giỏi, các đề thi Olympic toán học. Nội dung này chúng tôi tham khảo trong cuốn

sách [1] của Andreescu và Andrica và được trình bày trong Chương 3 của luận văn.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới TS. Ngô Văn Định, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Phòng Đào tạo, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

Xin cảm ơn những người thân trong gia đình và tất cả những người bạn thân yêu đã hết sức thông cảm, chia sẻ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi để tôi có thể học tập, nghiên cứu và thực hiện luận văn của mình.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2019

Người viết luận văn

Đỗ Trọng Nguyên

Chương 1

Biểu diễn số nguyên thành tổng riêng của lũy thừa của các nhân tử nguyên tố

Trong chương này, chúng tôi quan tâm đến bài toán biểu diễn số nguyên thành tổng lũy thừa của các nhân tử nguyên tố của nó. Ta ký hiệu S_k là tập tất cả các số nguyên có thể biểu diễn thành tổng lũy thừa k của các nhân tử nguyên tố của nó. Dễ dàng thấy rằng S_1 chính là tập tất cả các số nguyên tố. Hiện nay, với $k \geq 2$, người ta mới chỉ tìm thấy một số ví dụ về phần tử thuộc S_3 mặc dù số phần tử của mỗi tập S_k có thể là vô hạn. Trong [4], De Koninck và Luca đã mở rộng nghiên cứu tập các số nguyên có thể biểu diễn thành tổng riêng lũy thừa của các nhân tử nguyên tố. Cụ thể, nếu ký hiệu $S^*_{k,\ell}$ là tập tất cả các số nguyên có thể biểu diễn thành tổng ℓ lũy thừa k của các nhân tử nguyên tố phân biệt thì hai tác giả này đã chỉ ra được tập $\bigcup\limits_{k=2}^{\infty} S^*_{k,\ell}$ có vô hạn phần tử khi $\ell \geq 3$ là số nguyên lẻ. Ngoài ra, hai tác giả này cũng đã chỉ ra một số tính chất khác liên quan và một số thuật toán tìm một số phần tử của $S^*_{k,\ell}$. Mục đích của chương là trình bày lại các kết quả này của De Koninck và Luca.

1.1 Thặng dư bậc hai và luật thuận nghịch bậc hai

Trước khi trình bày nội dung chính của chương ở các mục sau, chúng tôi nhắc lại trong mục này một số kiến thức về thặng dư bậc hai, ký hiệu Legendre và luật thuận nghịch bậc hai, đó là những công cụ sẽ được sử dụng ở phần sau của luận văn. Nội dung của các kiến thức này chúng tôi tham khảo trong cuốn sách “Elementary Number Theory with Applications” của Koshy [8].

Định nghĩa 1.1.1. Cho m là một số nguyên và a là một số nguyên sao cho $(m, a) = 1$. Khi đó số a được gọi là một *thặng dư bậc hai* của m nếu tồn tại một số nguyên x sao cho $x^2 \equiv a \pmod m$.

Ví dụ 1.1.2. Xét với $m = 4$, ta thấy

$$1^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod 4.$$

Vậy 4 có một thặng dư bậc hai là 1.

Xét với $m = 13$, ta thấy

$$\begin{aligned} 1^2 &\equiv 1 \equiv 12^2 \pmod{13}, & 2^2 &\equiv 4 \equiv 11^2 \pmod{13}, \\ 3^2 &\equiv 9 \equiv 10^2 \pmod{13}, & 4^2 &\equiv 3 \equiv 9^2 \pmod{13}, \\ 5^2 &\equiv 12 \equiv 8^2 \pmod{13}, & 6^2 &\equiv 10 \equiv 7^2 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Vậy 13 có 6 thặng dư bậc hai là 1, 3, 4, 9, 10 và 12.

Theo định nghĩa ở trên, số nguyên a là thặng dư bậc hai của m khi và chỉ khi phương trình đồng dư bậc hai $x^2 \equiv a \pmod m$ có nghiệm. Tiêu chuẩn Euler dưới đây cho ta một điều kiện cần và đủ để một số nguyên dương a là thặng dư bậc hai của m trong trường hợp m là một số nguyên tố lẻ p.

Định lý 1.1.3 (Tiêu chuẩn Euler)**.** *Cho p là số nguyên tố lẻ. Khi đó một số nguyên dương a không chia hết cho p là một thặng dư bậc hai của p khi và chỉ khi $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$.*

Ví dụ 1.1.4. Để kiểm tra 2 có phải là thặng dư bậc hai của 17 hay không, ta tính $2^{(17-1)/2} = 2^8 \equiv 1 \pmod{17}$. Do vậy 2 là một thặng dư bậc hai của 17. Tương tự như vậy, ta có $3^{(17-1)/2} = 3^8 \equiv 16 \equiv -1 \pmod{17}$. Do đó, 3 không là thặng dư bậc hai của 17.

Như vậy tiêu chuẩn Euler cho ta một công cụ kiểm tra tính giải được của phương trình đồng dư $x^2 \equiv a \pmod p$. Tuy nhiên việc sử dụng công cụ này sẽ gặp khó khăn trong tính toán khi số nguyên tố p thực sự lớn. Một trong những công cụ hỗ trợ trong các tính toán này là *ký hiệu Legendre*.

Định nghĩa 1.1.5. Cho p là số nguyên tố lẻ và a là số nguyên bất kỳ sao cho $p \nmid a$. *Ký hiệu Legendre* (a/p) được xác định bởi công thức

$$(a/p) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \text{ là thặng dư bậc hai của } p, \\ -1 & \text{cho trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Ví dụ 1.1.6. Theo Ví dụ 1.1.2, 13 có 6 thặng dư bậc hai là 1, 3, 4, 9, 10 và 12 nên theo định nghĩa ký hiệu Legendre, ta có

$$(3/13) = 1, (1/13) = 1, (4/13) = 1, (9/13) = 1, (10/13) = 1, (12/13) = 1,$$
$$(2/13) = -1, (5/13) = -1, (6/13) = -1, (7/13) = -1, (8/13) = -1, (11/13) = -1.$$

Sử dụng ký hiệu Legendre, tiêu chuẩn Euler có thể được phát biểu lại như sau.

Định lý 1.1.7 (Tiêu chuẩn Euler)**.** *Cho p là số nguyên tố lẻ và a là một số nguyên dương thỏa mãn $p \nmid a$. Khi đó, ta có*

$$(a/p) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod{p}.$$

Hệ quả 1.1.8. *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Khi đó, ta có $(-1/p) = (-1)^{(p-1)/2}$.*

Nhận xét 1.1.9. Từ hệ quả trên ta có -1 là thặng dư bậc hai của p khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Dưới đây là một số tính chất cơ bản của ký hiệu Legendre và luật thuận nghịch bậc hai mà chúng tôi nhắc lại không chứng minh.

Mệnh đề 1.1.10. *Cho p là một số nguyên tố lẻ, và a, b là các số nguyên bất kỳ thỏa mãn $p \nmid ab$. Khi đó*

(1) *Nếu $a \equiv b \pmod{p}$ thì $(a/p) = (b/p)$.*

(2) $(a/p)(b/p) = (ab/p)$.

(3) $(a^2/p) = 1$.

Định lý 1.1.11 (Luật thuận nghịch bậc hai)**.** *Cho p và q là các số nguyên tố lẻ phân biệt. Khi đó ta có*

$$(p/q)(q/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Luật thuận nghịch bậc hai được phát biểu lại dưới dạng gắn với thực tiễn tính toán như hệ quả sau.

Hệ quả 1.1.12. *Cho p và q là các số nguyên tố lẻ. Khi đó, ta có*

$$(q/p) = \begin{cases} (p/q) & \textit{nếu } p \equiv 1 \pmod 4 \textit{ hoặc } q \equiv 1 \pmod 4, \\ -(p/q) & \textit{nếu } p \equiv q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Ví dụ 1.1.13. Xét với số nguyên tố 17. Vì $17 \equiv 1 \pmod 4$ nên ta có $(17/3) = (3/17)$. Ở ví dụ trước ta thấy 3 không là thặng dư bậc hai của 17. Do đó, 17 cũng không là thặng dư bậc hai của 3.

Xét trường hợp $p = 47$ và $q = 3$. Vì $47 \equiv 3 \pmod 4$ nên ta có $(3/47) = -(47/3)$. Ta lại có $47^{(3-1)/2} = 47 \equiv 2 \pmod 3 \equiv -1 \pmod 3$ nên 47 không là thặng dư bậc hai của 3 nhưng 3 là thặng dư bậc hai của 47.

Mệnh đề dưới đây cho ta điều kiện cần và đủ để 2 và -2 là thặng dư bậc hai của số nguyên tố p.

Mệnh đề 1.1.14. *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Khi đó*

$$(2/p) = 1 \textit{ khi và chỉ khi } p \equiv 1 \pmod 8 \tag{1.1}$$

và

$$(-2/p) = 1 \textit{ khi và chỉ khi } p \equiv 1 \pmod 8 \textit{ hoặc } p \equiv 3 \pmod 8. \tag{1.2}$$

1.2 Định nghĩa tập $S^*_{k,l}$

Từ mục này đến cuối chương, chúng tôi trình bày lại các kết quả của De Koninck và Luca [4] và kết quả của De Koninck [3] về bài toán biểu diễn số nguyên thành tổng riêng lũy thừa của các nhân tử nguyên tố.

Định nghĩa 1.2.1. Cho số tự nhiên n, ký hiệu $\omega(n)$ là số nhân tử nguyên tố phân biệt trong phân tích tiêu chuẩn của n thành tích các nhân tử nguyên tố.

Ví dụ 1.2.2. Trong phân tích nhân tử nguyên tố của $n = 378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$ có 3 nhân tử nguyên tố phân biệt nên $w(n) = 3$. Tương tự, ta có

$$w(15) = w(3 \cdot 5) = 2,$$

$$w(2548) = w(2^2 \cdot 7^2 \cdot 13) = 3,$$
$$w(2836295) = w(5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 53 \cdot 139) = 5.$$

Định nghĩa 1.2.3. Cho số nguyên $k \geq 2$, đặt

$$S_k = \Big\{n : \omega(n) \geq 2 \text{ và } n = \sum_{p|n} p^k\Big\},$$

trong đó tổng được lấy trên tập tất cả các nhân tử nguyên tố phân biệt của n. Nói một cách khác, S_k là tập các số nguyên có thể biểu diễn thành tổng lũy thừa k của các nhân tử nguyên tố của nó.

Ví dụ 1.2.4. Ta có

$$\begin{aligned}
378 &= 2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 2^3 + 3^3 + 7^3,\\
2548 &= 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13 = 2^3 + 7^3 + 13^3,\\
2836295 &= 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 53 \cdot 139 = 5^3 + 7^3 + 11^3 + 53^3 + 139^3,\\
4473671462 &= 2 \cdot 13 \cdot 179 \cdot 593 \cdot 1621\\
&= 2^3 + 13^3 + 179^3 + 593^3 + 1621^3,\\
23040925705 &= 5 \cdot 7 \cdot 167 \cdot 1453 \cdot 2713\\
&= 5^3 + 7^3 + 167^3 + 1453^3 + 2713^3.
\end{aligned}$$

Do đó, 5 số nguyên trên thuộc S_3.

Hiện nay, theo chúng tôi được biết, người ta vẫn chưa tìm được số tự nhiên nào thuộc S_k với $k = 2$ hoặc $k \geq 4$, mặc dù những tập này rất có thể là tập vô hạn phần tử. Như vậy, đối với tập S_k ta chưa có nhiều thông tin. Định nghĩa dưới đây cho ta tập số nguyên rộng hơn S_k, gồm các số nguyên có thể biểu diễn thành tổng riêng lũy thừa k của các nhân tử nguyên tố.

Định nghĩa 1.2.5. Cho số nguyên $k \geq 2$, đặt

$$S_k^* = \Big\{n : \omega(n) \geq 2 \text{ và } n = \sum_{p|n}^{*} p^k\Big\},$$

trong đó dấu $*$ chỉ ra rằng tổng được lấy trên tập con của tập nhân tử nguyên tố của n.